

Kompleks son tushunchasi ular ustida amallar

Agar son tushunchasining rivojlanib borishiga nazar tashlasak, uning boshi natural son bo'lib, nol va manfiy butun sonlarning, undan so'ng butunning ulushlari yordamida kasr sonlarning kiritilishi natijasida ratsional son tushunchasiga kelingan bo'lsa, irratsional sonning kiritilishi uni haqiqiy son tushunchasigacha kengaytirdi. Bunga sonlar ustida bajariladigan amallarga to'siq bo'ladigan holatlarni bartaraf qilish maqsadida qabul qilingan yangi tushunchalar sabab bo'ldi.

Agar, $x^2+1=0$ tenglamani qarasak, u haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emasligi ravshandir. Shu misolning o'zi haqiqiy sonlar to'plami hali mukammal emasligini, ya'ni uni yana kengaytirish kerak ekanligini anglatadi. Agar kvadrati -1 ga teng «son» mavjud deb qabul qilinsa, yuqoridagi tenglama ham yechimga ega bo'lar edi. Bu holatdan chiqish maqsadida kvadrati -1 ga teng «son» mavjud deb qabul qilamiz va uni i bilan belgilab *mavhum birlik* deb ataymiz, ya'ni $i^2=-1$. Ba'zan $i = \sqrt{-1}$ deb ham olinadi.

Agar a va b lar haqiqiy sonlardan iborat bo'lsa, $a+bi$ ifoda kompleks son deb ataladi, bu yerda i mavhum birlik bo'lib, $i^2 = -1$ deb qabul qilinadi.

Ba'zan kompleks sonni belgilash uchun bitta harf ham ishlatiladi, masalan, $z=a+bi$.

Agar $z=a+bi$ kompleks son berilgan bo'lsa, a uning haqiqiy qismi bi esa mavhum qismi, b mavhum qism koeffitsienti deb yuritiladi. Bu o'rinda, kompleks sonning mavhum qismi deyilganda ba'zan uning mavhum qismning koeffitsienti ham tushunilishini aytamiz. Kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlari uchun mos ravishda quyidagi belgilashlar ishlatiladi:

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b.$$

Agar $\operatorname{Im} z = 0$ bo'lsa $z=a+0i=a$ deb qabul qilinadi. Demak, haqiqiy son mavhum qismining koeffitsienti nolga teng bo'lgan kompleks sonidir.

Agar $\operatorname{Im} z \neq 0$ bo'lsa, z kompleks sonni *mavhum son* deb ataladi. Demak, kompleks sonlar to'plami haqiqiy va mavhum sonlar to'plamlarining birlashmasidan iborat ekan.

Agar $\operatorname{Re} z = 0$ va $\operatorname{Im} z \neq 0$ bo'lsa, $z=0+bi=bi$ deb qabul qilinadi va uni *sof mavhum son* deb ataladi.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki faqat $\operatorname{Re} z = 0$ va $\operatorname{Im} z = 0$ bo'lganda $z=0$ bo'ladi, ya'ni

$$(z=0) \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = 0).$$

Ikkita kompleks sonlarning tenglik sharti quyidagichadir:

$$(z_1=z_2) \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im} z_2).$$

Kompleks sonlar ustida katta va kichik tushunchalari mavjud emas, ya'ni kompleks sonlar to'plami tartiblashmagandir.

$z=a+bi$ kompleks songa qarama-qarshi kompleks son deb $-a-bi$ qabul qilinadi va $-z$ deb belgilanadi.

$z=a+bi$ son berilgan bo'lsa, $a-bi$ unga *qo'shma kompleks son* deyiladi va $\bar{z}$ bilan belgilanadi, ya'ni $\overline{a+bi} = a-bi$. Bundan ko'rinadiki, $\overline{(\bar{z})} = z$. Agar $a \in \mathbb{R}$ bo'lsa, $\bar{a} = a$ bo'lishi ravshandir, ya'ni *haqiqiy sonning qo'shmasi o'ziga tengdir*. Shu bilan birga $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$ va $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$ dir.

Endi kompleks sonlar ustida asosiy to'rt arifmetik amallarni ta'riflaymiz.

1. Qo'shish. Berilgan $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning z_1+z_2 yig'indisi deb,

$$z=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i \quad (11.1.1)$$

ga aytiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, kompleks sonlarni qo'shish uchun ularning haqiqiy qismlarini alohida va mavhum qismlarining koeffitsientlarini alohida qo'shib, mos yig'indilarni haqiqiy qism va mavhum qism koeffitsienti qilib yozish kifoyadir, ya'ni

$$(z_1+z_2)=(\text{Rez}_1+\text{Rez}_2)+(\text{Im}z_1+\text{Im}z_2)i.$$

Qo'shish amali uchun haqiqiy sonlarda bo'lgan xossalari bu yerda ham saqlanib qoladi:

$$z_1+z_2=z_2+z_1, \quad z+(-z)=0, \quad z+0=z, \quad (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

Bulardan tashqari

$$z+\bar{z}=2\text{Re } z, \quad \bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2}$$

ekanligini ko'rish osondir.

2. Ayirish. Bu amal qo'shishga teskari amal sifatida ta'riflanadi.

Berilgan z_1 va z_2 kompleks sonlarning ayirmasi z_1-z_2 deb shunday z kompleks songa aytiladiki, u bilan z_2 ning yig'indisi z_1 ni beradi, ya'ni

$$z+z_2=z_1$$

Bu ta'rif bo'yicha

$$(z_1-z_2)=(\text{Rez}_1-\text{Rez}_2)+(\text{Im}z_1-\text{Im}z_2)i \quad (11.1.2)$$

formulani olish qiyin emas.

Kompleks sonlarni ayirish ham haqiqiy sonlardagi xossalarga egadir:

$$z-z=0, \quad z_1-z_2=z_1+(-z_2).$$

Undan tashqari, $z-\bar{z}=(2\text{Im } z) \cdot i$, $\bar{z}_1-\bar{z}_2=\overline{z_1-z_2}$ larni keltirib chiqarish mumkin.

3. Ko'paytirish. Berilgan $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning ko'paytmasi $z_1 \cdot z_2$ deb,

$$z_1 \cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i \quad (11.1.3)$$

bilan aniqlanuvchi kompleks songa aytiladi.

Bu amal ham haqiqiy sonlardagi xossalari saqlab qoladi:

$$z_1 \cdot z_2=z_2 \cdot z_1; \quad z \cdot 1=z; \quad z \cdot 0=0;$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)=z_1(z_2 \cdot z_3);$$

$$z_1 \cdot (z_2 \pm z_3)=z_1z_2 \pm z_1z_3.$$

Undan tashqari,

$$z \cdot \bar{z}=(\text{Re } z)^2+(\text{Im } z)^2, \quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2=\overline{z_1 \cdot z_2}$$

lar to'g'riligiga ishonch hosil qilish osondir.

Eslatma. Agar kompleks sonlarni ikkihad deb qabul qilib, ikkihadni ikkihadga ko'paytirish qoidasi bu yerda o'rinli deb qaralsa, $i^2=-1$ ekanligini eslagan holda (11.1.3) ko'paytirish formulasini olish mumkin. Shu sababli bu formula yoddan ko'tarilgan taqdirda mazkur eslatmadan foydalanish o'rinlidir.

Masalan, $z_1=1+i$ va $z_2=2-3i$ larni ko'paytiraylik:

$$z_1 \cdot z_2=(1+i)(2-3i)=2-3i+2i-3i^2=2-i-3 \cdot (-1)=5-i.$$

4. Bo'lish. Bu amal ko'paytirishga teskari amal sifatida ta'riflanadi.

Berilgan $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning bo'linmasi $z_1:z_2$ yoki $\frac{z_1}{z_2}$ deb, shunday z kompleks songa aytiladiki, uning z_2 bilan ko'paytmasi z_1 ni beradi, ya'ni $z \cdot z_2 = z_1$ bo'ladi.

Bu ta'rifdan foydalanib,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \quad (11.1.4)$$

formulani chiqarish qiyin emas.

Agar kasrning surat va maxrajini bir xil kompleks songa (noldan farqli) ko'paytirish bu yerda ham o'rinli ekanligini e'tiborga olinsa, surat va maxrajni maxrajining qo'shmasiga ko'paytirish yo'li bilan bo'lish amalini, (11.1.4) formula yoddan ko'tarilgan taqdirda, bajarish mumkin. Masalan,

$$\begin{aligned} \frac{2-i}{3+4i} &= \frac{(2-i) \cdot (3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-3i+4i^2}{3^2+4^2} = \frac{6-11i-4}{25} = \frac{2-11i}{25} = \\ &= \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i = 0,08 - 0,44i. \end{aligned}$$

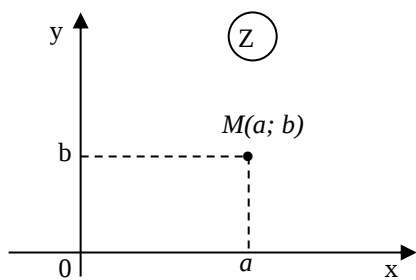
Shuningdek, $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ tenglik o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish osondir.

11.2. Kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik hamda ko'rsatkichli shakllari

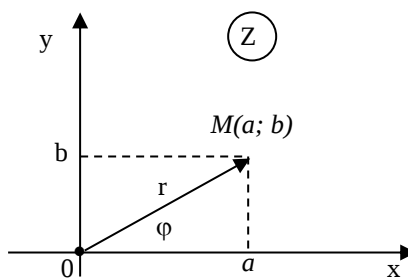
$z=a+bi$ kompleks sonni tartiblashgan ikkita haqiqiy sonlarning, ya'ni a va b larning berilishi to'liq aniqlaydi. Agar koordinatalar tekisligini olsak, undagi har bir $M(a; b)$ nuqtaning holatini ham uning absissasi a va ordinatasi b larning berilishi to'liq aniqlaydi. Shu sababli, $z=a+bi$ kompleks songa koordinatalar tekisligidagi $M(a; b)$ nuqtani mos qo'yish mumkin (11.2.1-rasmga qarang). Bu o'rinda, o'rnatilgan bunday moslik o'zaro bir qiymatli ekanligini ham takidlaymiz.

Agar koordinatalar tekisligining nuqtalariga yuqoridagidek kompleks sonlar mos qo'yilgan bo'lsa, uni *kompleks tekislik* deb yuritiladi va odatda, uning o'ng yuqori burchagiga doiracha ichiga z harfi yozib qo'yiladi (11.2.1-rasmdagidek).

Bu kompleks sonning geometrik tasviridir. Shu bilan birga uning geometrik tasviri sifatida, $M(a; b)$ nuqtaning radius-vektorini ham qabul qilish mumkin (11.2.2-rasm).



11.2.1-rasm.



11.2.2-rasm.

z kompleks songa mos qo'yilgan radius vektorning moduli r ni z kompleks sonning moduli, bu vektorning Ox o'qi yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi φ ni z kompleks sonning argumenti deb ataladi va mos ravishda $|z|$ hamda $\arg z$ kabi belgilanadi. Demak, $|z|=r$, $\arg z=\varphi$.

U holda, $z=a+bi$ kompleks son uchun

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{va} \quad a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi$$

larni keltirib chiqarish mumkin. Endi, a va b larning bu ifodalarini z ga qo'yib,

$$z=a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

ya'ni

$$z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (11.2.1)$$

ni olamiz. Olingan (11.2.1) ifoda kompleks sonning trigonometrik shakli deb ataladi. Ta'rif bo'yicha kiritilgan $z=a+bi$ esa uning algebraik shakli deb yuritiladi.

Bu yerda, har bir kompleks son o'zining yagona moduliga ega ekanligini, ammo uning argumenti cheksiz ko'p bo'lishini aytamiz. Haqiqatdan ham agar M nuqtani koordinatalar boshi atrofida to'liq aylantirsak, u yana o'zining avvalgi holatiga qaytadi, demak, $\varphi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, burchaklar ham z kompleks son argumenti bo'lar ekan. Odatda, φ ni z ning bosh, $\varphi+2\pi k$ ni esa umumiy argumenti deyilib ($0 \leq \varphi < 2\pi$), ularni mos ravishda

$$\varphi = \arg z; \quad \varphi + 2\pi k = \text{Arg} z, \quad k \in \mathbb{Z}$$

kabi belgilash qabul qilingan.

Shuni ham aytamizki, $z=0$ sonning moduli nolga teng, ammo uning argumenti aniqlanmagandir.

Agar Eyler formulasi deb ataluvchi $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ni hisobga olsak (uni keyinroq qator yordamida isbotlaymiz), (11.2.1) ni

$$z=r e^{i\varphi} \quad (11.2.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (11.2.2) kompleks sonning ko'rsatkichli shakli deb ataladi.

Kompleks sonning trigonometrik va ko'rsatkichli shakllari ustida ko'paytirish, bo'lish va quyida ko'riladigan darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish amallarini bajarish birmuncha yengil ko'chadi.